集代数

定义 1 (幂集). 集合 S 的所有子集组成的集合称为集合 S 的**幂集**，记作 2^S.

定义 2 (环与代数). 设非空集类 $\mathcal{R} \subset 2^S$ 满足以下条件：

1. 对差封闭：$\forall A, B \in \mathcal{R}, A - B \in \mathcal{R}$;
2. 对有限并封闭：$\forall E_i \in \mathcal{R}, i = 1, 2, \cdots, n,\ \bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{R}$.

则称 $\mathcal{R}$ 为**环**. 特别地，若全集在其中，即 $S \in \mathcal{R}$，则称 $\mathcal{R}$ 为**代数**. 当有限并可以改为可列并时，分别称为 $\boldsymbol{\sigma}$**-环**和 $\boldsymbol{\sigma}$**-代数**.

定义 3 (π-系统). 设非空集类 $\mathcal{F} \subset 2^S$ 满足以下条件：

1. 对有限交封闭：$\forall E_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \cdots, n,\ \bigcap_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{F}$.

则称 $\mathcal{F}$ 为 $\boldsymbol{\pi}$**-系统**.

定义 4 (λ-系统). 设非空集类 $\mathcal{F} \subset 2^S$ 满足以下条件：

1. 全集在其中：$S \in \mathcal{F}$;
2. 对差封闭：$\forall A, B \in \mathcal{F}, A - B \in \mathcal{F}$;
3. 对不交可列并封闭：$\forall E_i \in \mathcal{R}, i = 1, 2, \cdots,\ \bigsqcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{F}$.

则称 $\mathcal{F}$ 为 $\boldsymbol{\lambda}$**-系统**.

定义 5 (单调类). 若非空集类 $\mathcal{F} \subset 2^S$ 对单调集列的极限封闭，则称 $\mathcal{F}$ 为**单调类**.

定义 6 (生成的 σ-环). 设非空集类 $\mathcal{F} \subset 2^S$，称包含 $\mathcal{F}$ 的最小的 σ-环为 $\mathcal{F}$ 生成的 σ-环，记作 $R(\mathcal{F})$.

定义 7 (生成的 σ-代数). 设非空集类 $\mathcal{F} \subset 2^S$，称包含 $\mathcal{F}$ 的最小的 σ-代数为 $\mathcal{F}$ 生成的 σ-代数，记作 $\sigma(\mathcal{F})$.

定义 8 (生成的 λ-系). 设非空集类 $\mathcal{F} \subset 2^S$，称包含 $\mathcal{F}$ 的最小的 λ-系为 $\mathcal{F}$ 生成的 λ-系，记作 $\delta(\mathcal{F})$.

定理 1 (λ-π 系定理). 设 $\mathcal{F}$ 为 π-系，则

$$\delta(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F}).$$

证明. $\sigma(\mathcal{F})$ 为包含 $\mathcal{F}$ 的 λ-系，而 $\delta(\mathcal{F})$ 是包含 $\mathcal{F}$ 的最小的 λ-系，于是 $\delta(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{F})$.

为证 $\sigma(\mathcal{F}) \subset \delta(\mathcal{F})$，只需证 $\delta(\mathcal{F})$ 为 σ-代数.

只需证 $\delta(\mathcal{F})$ 关于有限交封闭.

对任意 $A \in \delta(\mathcal{F})$，令

$$\kappa(A) = \{B \in \delta(\mathcal{F}) : B \cap A \in \delta(\mathcal{F})\}.$$

以下证 $\kappa(A) = \delta(\mathcal{F})$.

首先，若 $A \in \mathcal{F}$，因 $\mathcal{F}$ 为 π-系，故 $F \subset \kappa(A)$.

以下说明 $\kappa(A)$ 为 λ-系. 如此 $\kappa(A) \supset \delta(\mathcal{F})$，而由 $\kappa(A)$ 定义，显然 $\kappa(A) \subset \delta(\mathcal{F})$，如此 $\kappa(A) = \delta(\mathcal{F})$.

1. 全集在其中：$S \cap A \in \kappa(A)$;

2. 不交可列并封闭：设 B_n 两两不交，$B_n \subset \kappa(A)$，即 $B_n \cap A \in \delta(\mathcal{F})$. 有

$$\left(\bigcup_n B_n\right) \cap A = \bigcup_n (B_n \cap A) = \bigsqcup_n (B_n \cap A) \in \delta(\mathcal{F}).$$

3. 补集在其中：若 $B \in \kappa(A)$，即 $B \cap A \in \delta(\mathcal{F})$，下证 $B^c \in \kappa(A)$，即证 $B^c \cap A \in \delta(\mathcal{F})$.

$$B^c \cap A = (B \cap A)^c \cap A = ((B \cap A) \cup A^c)^c = ((B \cap A) \sqcup A^c)^c.$$

其次，若 $A \in \delta(\mathcal{F})$，$\mathcal{F} \subset \kappa(A)$，同理证明 $\kappa(A)$ 是 λ-系即可. □

定理 2 (单调类方法)**.** 若 $\mathcal{F}$ 是环，则

$$M(\mathcal{F}) = R(\mathcal{F}).$$